

## Control 5

**P1.** Sea  $(G, *)$  un grupo no necesariamente abeliano, con neutro  $e$ .

Para  $a \in G$ , se define la función  $f_a : G \longrightarrow G$ ,  $f_a(x) = a * x * a^{-1}$ .

- I) (1.0 ptos) Pruebe que  $f_e = id_G$  y que para todo  $a, b \in G$ ,  $f_{a*b} = f_a \circ f_b$ . Donde  $\circ$  es la composición de funciones.
- II) (3.0 ptos) Pruebe que  $\forall a \in G$ ,  $f_a$  es un isomorfismo de  $(G, *)$  en  $(G, *)$ .  
Concluya que  $f_a$  es invertible con  $f_a^{-1} = f_{a^{-1}}$  y que la estructura  $(\{f_a | a \in G\}, \circ)$  es un grupo.
- III) (2.0 ptos) Pruebe que si  $H(G) = \{a \in G | f_a = id_G\}$ , entonces  $(H(G), *) \leq (G, *)$ , es decir  $(H(G), *)$  es subgrupo de  $(G, *)$ . Y que  $a \in H(G) \iff \forall x \in G, a * x = x * a$ .

**P2.** a) Para  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , fijo, denotamos al conjunto de todos los múltiplos enteros de  $p$ , por  $p\mathbb{Z}$ . Considere la estructura  $(p\mathbb{Z}, +, *)$  donde  $+$  es la suma usual y  $*$  está definida por  $\forall x, y \in p\mathbb{Z}, x * y = \frac{xy}{p}$ .

- I) (3.0 ptos.) Demuestre que  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ , el anillo de enteros, es isomorfo a  $(p\mathbb{Z}, +, *)$ .
- II) (1.0 ptos.) Demuestre que  $(p\mathbb{Z}, +, *)$  es un anillo conmutativo con unidad e identifique el cero y la unidad de este anillo. ¿Es  $(p\mathbb{Z}, +, *)$  cuerpo?
- b) (2.0 ptos.) Considere el conjunto  $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  con la operación  $\cdot_7$ , de multiplicación módulo 7 y los subconjuntos de  $\mathbb{Z}_7$ ,  $A_1 = \{1, 6\}$ ,  $A_2 = \{1, 4, 5\}$ ,  $A_3 = \{1, 3, 5, 6\}$ ,  $A_4 = \{1, 2, 4\}$ . Señale cuáles de los conjuntos anteriores, con la operación  $\cdot_7$ , son un grupo y cuáles no lo son. Justifique claramente su respuesta.

Tiempo: 1 hora 30 minutos.